第２学年数学科(数学Ⅲ)学習指導案

指導者（数学領域専攻）○○○○
（指導担当教員　○○○○）

１．日　　時　　平成○○年○月○日(○曜)　第○時限（○○：○○～○○：○○）
２．学年・組　　第２学年 ○講座　計○名
３．場　　所　　第２年○組　HR 教室
４．単 元 名　　微分法・積分法（数学Ⅱ　第６章）
５．単元の目標

(数学への関心・意欲・態度)
・関数の極限について関心をもつ。
・微分や積分を積極的に活用しようとする。

(数学的な見方や考え方)
・関数の極限の意味を直観的に考える。
・関数の増減，極値から関数の最大値，最小値を考える。
・方程式・不等式の問題への応用を考える。
・定積分で表された関数や方程式･不等式の問題への応用を考える。

(数学的な技能)
・微分係数の定義を理解し，定義に従って導関数を求めることができる。
・微分の簡略公式$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}\left(n = 1,2,3\right)$を用い，導関数を求めることができる。
・導関数と接線の傾きの関係を理解し，接線の方程式を求めることができる。
・増減表を用いてグラフの増減を表し，関数のグラフ（特に三次関数）を描くことができる。
・関数 $f\left(x\right)$の不定積分を求めることができる。
・定積分を求めることができる。
・定積分を用いて，曲線や直線に囲まれた図形の面積を求めることができる。

(知識・理解)
・微分法の逆演算としての不定積分の意味や積分と面積の関係を理解する。
・定積分を不定積分の範囲が定まったものとして理解する。
・定積分が面積を表していることを理解する。

６．単元について

①教材観

本単元の内容は，微分法・積分法の基礎である。３年生の数学Ⅲの学習でさらに詳しく展開されることになるが，本単元はその基本として，三次関数を主として，導関数の基本的性質，グラフの描き方，不定積分・定積分の性質，面積の求め方などが取り扱われる。

単元の前半の内容は，微分法である。微分法とは，関数の変化率を求める考え方である。高等学校で取り扱われる高次関数，三角関数，指数関数，対数関数などでは，グラフ上の各点における微分係数が変化する。微分係数を求めることで，関数のそれぞれの特徴を知ることができる。本単元

では，まず平均変化率を定義し，平均変化率の極限値として微分係数を定義する。さらに，導関数を定義し，その上で，簡略公式を用いた微分係数の求め方を導く学習内容である。

また，微分係数は図形的には曲線の各点における接線の傾きを意味することから，曲線の接線の方程式を求めることができる。そして接線の傾きの正負で関数の増減を知ることができる。関数の増減を調べることにより，複雑な関数であっても，グラフを描くことが可能になる。これまでは，関数 $y=f(x)$ のグラフを描くときには，x に対応する $f(x)$ をたくさん求めて，点の集合としてグラフの概形を求めるという方法を用いていた。それに対し，関数の増減という特徴からグラフを描くこの方法は非常に画期的であり，様々な関数のグラフを描くときに応用できる。

また，微分法は他教科においても必要な考え方であり，特に物理学を考える上で重要といえる。例えば，力学分野では「単位時間あたりの物体の位置の変化」を「平均の速さ」,「経過時間を限りなく短くしていくときの平均の速さの極限」を「瞬間の速さ」としている。同様に「単位時間あたりの速度の変化」を「平均の加速度」,「経過時間を限りなく短くしていくときの平均の加速度の極限」を「加速度」としている。これらは数学的概念である「平均変化率」とその極限である「微分係数」の具体的な例であり，物体の運動の様子を知るときの手掛かりとなる。また，「物体の単位時間あたりの運動量の変化」は「物体がうけた平均の力」である。物体にはたらく力は目には見えないが，運動量（質量×速度）が測定できればそれをもとにして，物体にはたらく力の大きさや向きについて考えることを可能にする。このように時刻とともに変化する量が関数としてわかっているとき，各時刻での瞬間的な変化率を知ることが微分法であり，物理学で大変よく使われる考え方である。

また，単元の後半の内容は，積分法である。積分法は，微分の逆の計算を行うのであるが，実はそれにより面積や体積を求めることが可能になる。定積分が，関数 $f(x)$ と $x=a, x=b$，x 軸で囲まれた部分の面積と一致する理由を示すのに，数学Ⅱではまず面積を $S(x)$ という関数で表し，$S'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=f(x)$ を証明することになっている。そして，このことから関数 $f(x)$ を区間 $a\leq x\leq b$ で定積分したものが $S(b)$ と一致することを示す。これを用いると，より複雑な図形の面積を容易に求めることが可能になる。

また，数学Ⅲでは，区分求積法を学習することになっている。湖などの複雑な図形の面積を求めるときに，図形の上に方眼を描きその個数から面積を求める方法があるが，それは，区分求積法の考え方の第１歩である。この方法は小学校で学習している内容である。さらに方眼の目盛を小さくしていけば誤差が小さくなっていく。これらのイメージは全体を求めるために「微小のものの和」を考える積分法の理解の手助けとなると考えられる。

さらに，微分法と同様，積分法も他教科，特に物理学において重要な意味を持つ。たとえば物理学ではグラフを多用し，面積で表される量を考えることがよくある。時刻を t，速さを v とすると $v-t$ グラフの面積で変位を求めることができる。力を F とすると $F-t$ グラフの面積で力積を求めることができる。

②生徒観

２年○講座の生徒は理系へ進学することを意識している。しかし，講座内での理解度の差が激しく，学習塾等で既に内容を学習した生徒もいれば，学校の授業のみで理解を図ろうと努力する生徒

も存在する。このような講座編成のため，少し高レベルの問題も発展的な内容として取り扱うことが必要な生徒もいるが，しかし基本的な事項をなかなか理解しにくい生徒もいる。また，この講座では全員が物理Ⅰを選択しているが，物理を考える上で多用されている数式の数学的な意味を理解していない生徒もいる。

微分法では，極限というこれまでに学習したことのない新しい概念を導入することから始まるが，その新しい概念が生徒には理解しにくいことがある。例えば，極限値を求めるとき，「$x \to a$ ならば $f(x) \to \alpha$」と表現するが，この「$\to$」は「関数 $f(x)$ が限りなく α に近づく」ことを表すことを理解することが，生徒にとっては非常に難しい。このような導入が理解できない結果として，「微分の計算はできるが，計算結果が何を表しているのかが分からない」という生徒も出てくるであろう。さらに，接線の方程式では，数学Ⅱで学習した「傾きと通る１点が分かっている場合の直線の方程式」を用いたり，最大値・最小値では他の関数でこれまでに学習した知識を用いたりといったように，既に学習した内容を用いて取り組む問題が多く，説明するときにこれまでの内容の復習を必要とする生徒もいるだろう。

積分法では，微分法と積分法の計算が逆になることから，慣れるまでは，積分法なのに次数が下がる，微分法なのに次数が上がるなど，計算時に混乱が生じる生徒がでる可能性がある。また，二次関数と一次関数のグラフで囲まれた部分の面積を求めるときは，グラフの交点を求めたり，関数のグラフを描いたりするので，やはり復習が必要な生徒がいるだろう。

③指導観

本単元では，まずは教科書に書かれた項目を全員が確実に理解することを目標としたい。そのために，教科書を丁寧に読み進め，「この文章が表していることはどういう意味なのか？」という，教科書には書かれていない点について解説をし，生徒のより深い数学的な理解を図りたい。例えば，関数の極大･極小の応用問題として，極値を取る x 座標が与えられたとき元の関数を求める問題（応用例題 2：「関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$ が $x=-1$ で極大値をとり， $x=3$ で極小値をとるように，定数 a,b の値を定め，極値を求めよ」）があるが，この問題では，元の関数を求めた後に，その関数が問題文の条件を満たしているのかを示さなければ解答として十分とはいえない（この問題では，「関数が $x=a$ で極値をとるならば $f'(a)=0$」を用いて元の関数を求めるのだが，その逆である「 $f'(a)=0$ ならば関数が $x=a$ で極値をとる」とは必ずしもいえない）ことを意識させたい。この考え方は，生徒は既に学習しているはずであるができないと予想されるため，理由を明らかにしないまま，「教科書に書いてあるから」「先生からこう解くように言われたから」という理由で解答しても意味がないことを理解させたい。理系の道に進学する生徒を対象とする以上，なぜこのように解答しなければならないのか，理由を明確にする指導をしたい。また，問題を解く中で，傾きと通る１点が分かっているときの方程式の導き方，四元一次方程式の解き方，式の除法など，これまでの学習内容を利用する場面が多く見られるため，そのときに，過去に学習した内容を生かして，効率よく問題を解くための方法も身に付けさせたい。

さらに，微分法・積分法が利用される例として物理学を取り上げ，微分法・積分法が何をしているのかを理解できるよう指導したい。その上で，本単元での学習が，公式の暗記にとどまっていたかもしれない物理の学習の一助になるよう指導することを目指している。

7．指導計画（全 20 時間）

第一次　微分係数と導関数　・・・ 4 時間

- 微分係数（1 時間）
- 導関数（3 時間）

第二次　導関数の応用　・・・ 9 時間（本時 7／9）

- 接線（2 時間）
- 関数の増減と極大・極小（4 時間）
- 最大値・最小値（1 時間）
- 関数のグラフと方程式・不等式（2 時間）

第三次　積分法　・・・ 7 時間

- 不定積分（2 時間）
- 定積分（3 時間）
- 面積（2 時間）

8．本時の学習

(1) 本時の目標

- 関数の最大値と最小値を，導関数を用いて求めることができる。
- 最大値と最小値は定義域の端点または極値となることを理解する。

(2) 本時について

① 本時の教材観

本時の学習では，三次関数 $y=f(x)$ の最大値・最小値を求めることが扱われる。関数の最大値・最小値を求める問題は，これまでに数学Ⅰの「二次関数の最大・最小」，数学Ⅱの「領域と最大・最小」,「三角関数を含む最大値，最小値」という単元で扱われる。これらの単元では，グラフを描くことによって y の最大・最小を求めることになっている。また，文章題もあり，問題文から関係式を作り，最大・最小を求める学習がある。特に二次関数では，定義域の範囲に頂点があれば，最大または最小になることがポイントとなる。

これまでとは異なり，増減表を作り関数の最大値・最小値を判定することを狙いとする。その際，定義域によっては極値が必ずしも最大値・最小値とならず，さらに，極値と定義域の両端の点の y 座標を求めることで初めて最大値・最小値が判定できることが大切な点である。

② 本時の生徒観

生徒は，これまでの授業で $y=f(x)$ の導関数を求め，増減表からグラフを描く問題に多く取り組んでいる。そのため，増減表を書くこと，グラフを描くことには慣れてきている生徒が多いと考えられる。極値については， $f'(x)=0$ となるという観点以外にも，グラフの形が「山の頂上」のようになっているという印象を持っている生徒がいると考えられる。そのために,「極大値＝最大値」，または「極小値＝最小値」という誤った概念を持っている生徒もいると考えられる。

③ 本時の指導観

本時においても，まずは教科書に書いてある項目を全員が確実に理解することを目標としたい。例えば，定義域が定められている場合，グラフを描くときには定義域内は実線で，定義域外は破線で描く，などの点についても説明を加えたい。増減表の書き方，グラフの描き方については既習事

項であるが，この単元では，増減表から三次関数のグラフを描けるようになることが目標であることを意識し，説明を加えたい。

また，文章題を解くときには，何を x として，どのような過程を経て式ができあがったのかをまず理解させ，その上で，関数の最大値・最小値を求めることで文章題を解くことができることを理解させたい。

(3) 本時の展開　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　○主なる指示・発問　■評価

<table>
<tr><th>区分</th><th>学習活動と内容
（予想される生徒の反応）</th><th>指導上の留意点・支援・評価
（教師の活動）</th><th>準備物
資料等</th></tr>
<tr><td rowspan="3">導入
5 分</td><td>1．既習事項の復習をする。
・二次関数の最大・最小の復習を行う。</td><td>・既習事項の復習をさせる。
○生徒を指名し，最大値・最小値を答えさせ理解度を確認しながら次の問題の説明をする。</td><td rowspan="3">教科書
筆記具
ノート</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y=x^2(-2\le x\le 4)$　の最大値・最小値を求めよ。</td></tr>
<tr><td>・２次関数のグラフで定義域が定められているときは定義域内は実線で，定義域外は破線で書くことを思い出す。
・定義域内にグラフの頂点があれば，そこで最小値になり，定義域の端だけでは最大値・最小値は分からないことを思い出す。</td><td>○グラフを板書し，定義域が定められているときのグラフのかき方にも注目させる。
・グラフの頂点が最小値になることを指摘し，１次関数と異なり，定義域の端の点の y 座標だけでは最大値・最小値は分からず，グラフを描く必要があった点をおさえる。</td></tr>
<tr><td rowspan="4">展開１
10 分</td><td>2．次の問題の解法の説明を聞き理解する。</td><td>○次の問題の説明をする。
・増減表を書いてグラフを描く時は，発問することにより理解度を確認しながら板書する。</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="2">次の関数の最大値と最小値を求めよ。
$y=-2x^3+3x^2+12x\quad(-2\le x\le 4)$</td></tr>
<tr><td>・三次関数の増減表とグラフの描き方を再確認する。
・定義域が制限されている時の増減表は，両端に区間の端での値を書く欄を作る。
・グラフから，最大・最小となる時の x の値を見てとる。
・極大値，極小値と最大値，最小値が一致しないことを導き出す。
・今までの学習をまとめる。</td><td>○ y' の式と $y'=0$ になるときの x， y の値(極大値，極小値)については生徒を指名し，答えさせる。
○増減表も書くが，両端に区間の端の値を書く欄のスペースを空けておくよう生徒に指示する。
○グラフから，最大・最小となる時の x の値を答えさせる。
○増減表の両端に区間の端の欄を付け加えておくと，最大値・最小値が求めやすくなることを説明する。
■最大値・最小値を求めることができたか。
・まとめを行う。</td></tr>
<tr><td colspan="2">三次関数の最大値，最小値を求めるには，定義域内の極大値，極小値と区間の両端の 4 点を比較すればよい。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>展開２
15 分</td><td>３．次の練習１３を解く。</td><td>○練習１３を解くように指示する。</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">練習１３　次の関数の最大値と最小値を求めよ。
（１） $y=x^3-12x\ (-3\le x\le 3)$
（２） $y=-2x^3+3x^2+4\ (0\le x\le 2)$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>・問題を解く。
・分からないところは質問する。
・代表者２名は黒板に答えを書く。</td><td>○問題を解かせる前に生徒２名を指名し，できたら解答を板書するよう指示する。
○問題を板書する。
■増減表が書けているか，増減表に区間の両端の欄を作っているか，最大値，最小値が求められたか。
・必要があれば補足説明を行う。</td><td></td></tr>
<tr><td>展開３
(15 分)</td><td>４．応用例題３の解法の説明を聞く。</td><td>○応用例題３の解法の説明をする。</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">応用例題３
１辺が 12 ㎝の正方形の厚紙の四すみから，合同な正方形を切り取った残りで，ふたのない直方体の箱を作る。箱の容積を最大にするには，どのようにすればよいか。</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>・考えるべき対象が何であるか考える。
・容積について考える。

・V を決定しているものは何であるかを考える。
・V を決定しているものは正方形の辺の長さであること見いだす。

・x の範囲を考える。
・x の範囲が $0<x<6$ であることを導き出す。

・V を x の式で表す。

・問題の意図に従って解答する。

・答え合わせを行い，分からない所を質問する。</td><td>○厚紙の絵を板書し，問題で何について考えるよう求められているか考えさせる。
○以下発問しつつ板書する。
・箱の容積を V とおくと言う。

○ V は何によって決まるか考えるよう指示し１人の生徒に答えさせる。
・V を決定しているものは正方形の辺の長さであるのでそれを x と置くと言う。
○ x の範囲を考えさせる。

○ $x<6$ について気が付かなければ，$x=8$ であるとどうなるか考えさせる。
○ V を x の式で表すよう指示する。
○ V が x の三次関数となっていることを指摘し，三次関数の最大値を求める問題であることを指摘する。
○前問と同じことになっていると指摘し，解くように指示する。
■文章題において，最大値(最小値)の求め方を理解し，を求めることができたか。

・正解を板書し，答えあわせをさせる。</td><td></td></tr>
</table>

	・文章問題の解き方のポイントをまとめる。	○文章問題を解くポイントをまとめる。	
	問われていることが何であるかを把握する。 問われているものを関数で表す。 関数のグラフを描き最大値・最小値を考える。		
まとめ ５分	５．以下の内容を学習したことを確認する。	○本時の学習内容をまとめる。	
	・グラフが描ければそれを見て最大値，最小値が判断できる。 ・三次関数の最大値，最小値を求めるには，定義域内の極大値，極小値と区間の両端の４点を比較すればよい。 ・文章問題では，問われていることが何であるかを把握して関数で表し，グラフを描いて最大値・最小値を考える。		
	・まとめの内容を理解し，ノートに書く。		
	・課題(宿題)内容を知る。(課題は練習１４である。｢練習１４：底面の直径と高さの和が １８㎝である直円柱の体積が最大となるのは，高さが何㎝のときか｣)。	○練習１４を宿題とすることを連絡する。	
	・次時の連絡を聞く。	○次の時間は，練習１４の解答から始めることを連絡する。	

(4) 本時の評価

・関数の最大値・最小値を，導関数を用いて求めることができるようになったか。

・極値が必ずしも最大値・最小値とならないことを理解したか。

(5) 板書計画　別紙

(6) 資料等　教科書　数学Ⅱ　数研出版

問題集　４ＳＴＥＰ数学Ⅱ＋Ｂ　数研出版