令和７年度　教育学部一般選抜（前期日程）

数　学

【解答例】

$\boxed{1}$ (1)（配点 20 点）

まず，A チームの 4 人を，それぞれ間をあけて横一列に並べる．この並び方の総数は，$4! = 24$ となる．

A　　A　　A　　A

次に，B チームの 4 人を，3 人と 1 人に分けて横一列に並べる．この並び方の総数は，$4! = 24$ となる．

$\boxed{\mathrm{BBB}}$　　B

A チームの両端と間の 5 つの場所のうち，2 つの場所に B チームの 3 人と 1 人を並べる．この並び方の総数は，${}_5\mathrm{P}_2 = 20$ となる．

　　A　　A　　A　　A

↑　　↑　　↑　　↑　　↑

$\boxed{\mathrm{BBB}}$　　B

以上が求める並び方であるから，積の法則により

$$4! \times 4! \times {}_5\mathrm{P}_2 = 24 \times 24 \times 20 = 11520 (\text{通り})$$

が求める総数である．　□

(2)（配点 20 点）

8 人の円形の位置に，A チームの 4 人を 1 つ飛ばしで並べる．この並び方の総数は，$(4-1)! = 6$ である．

　A

A　　A

　A

次に，このように A チームの 4 人の位置が決められた状態で，残った 4 か所に B チームの 4 人を並べていく．この並び方の総数は，$4! = 24$ である．したがって，積の法則により

$$(4-1)! \times 4! = 6 \times 24 = 144 (\text{通り})$$

が求める総数である．　□

$\boxed{2}$ (1)（配点 2 点）

$\{a_n\}$ は初項 1，公比 r の等比数列なので，$a_n = r^{n-1}$. □

(2)（配点 15 点）

$b_2 = rb_1 + a_1 = r + 1$，$b_3 = rb_2 + a_2 = r^2 + 2r$，$b_4 = rb_3 + a_3 = r^3 + 3r^2$ である．これらから，一般項は $b_n = r^{n-1} + (n-1)r^{n-2}$ と予想できる．これが正しいことを，数学的帰納法で示す．

(i) $n = 1$ のとき，$r^0 + 0 \cdot r^{-1} = 1 = b_1$ となって正しい．

(ii) $n = k$ のとき，$b_k = r^{k-1} + (k-1)r^{k-2}$ が成り立つと仮定する．このとき，$\{b_n\}$ が満たす漸化式から

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= rb_k + a_k \\ &= r\{r^{k-1} + (k-1)r^{k-2}\} + r^{k-1} \\ &= r^k + kr^{k-1} \\ &= r^{(k+1)-1} + \{(k+1)-1\}r^{(k+1)-2} \end{aligned}$$

となって，$n = k + 1$ のときも正しい．

以上より，$b_n = r^{n-1} + (n-1)r^{n-2}$. □

(3)（配点 15 点）

$S_n = \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) = \sum_{k=1}^{n}(k-1)r^{k-2}$ に対して，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= \left\{0 + \sum_{k=2}^{n}(k-1)r^{k-2}\right\} - \left\{\sum_{k=2}^{n}(k-2)r^{k-2} + (n-1)r^{n-1}\right\} \\ &= \sum_{k=2}^{n} r^{k-2} - (n-1)r^{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} r^{k-1} - (n-1)r^{n-1}. \end{aligned}$$

ここで，$\sum_{k=1}^{n-1} r^{k-1} = \dfrac{1 - r^{n-1}}{1 - r}$ なので，$n \geqq 2$ のときは

$$S_n - rS_n = \frac{1 - r^{n-1}}{1 - r} - (n-1)r^{n-1}.$$

また，$S_1 = 0$ なので，上の等式は $n = 1$ のときも成立する．

以上より，$S_n - rS_n = \dfrac{1 - r^{n-1}}{1 - r} - (n-1)r^{n-1}$. □

(4)（配点 8 点）

(3) より，$(1-r)S_n = \dfrac{1-r^{n-1}}{1-r} - (n-1)r^{n-1}$ である．$r \neq 1$ より

$$S_n = \frac{1-r^{n-1}}{(1-r)^2} - \frac{(n-1)r^{n-1}}{1-r}.$$

また，$\sum_{k=1}^{n} a_k = \dfrac{1-r^n}{1-r}$ である．よって，

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) + \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1-r^{n-1}}{(1-r)^2} - \frac{(n-1)r^{n-1}}{1-r} + \frac{1-r^n}{1-r}.$$

□

$\boxed{3}$ (1)（配点 8 点）

△ABC について，∠A の二等分線の性質より，$\mathrm{BE}:\mathrm{CE} = \mathrm{AB}:\mathrm{AC} = 2:\sqrt{3}$．これより $\mathrm{BE}:\mathrm{BC} = 2:2+\sqrt{3}$ だから，

$$\mathrm{BE} = \frac{2}{2+\sqrt{3}}\mathrm{BC} = \frac{2}{2+\sqrt{3}} = 4-2\sqrt{3}.$$

□

(2)（配点 14 点）

$\mathrm{BC} = \mathrm{BD} = 1$，$\angle\mathrm{DBC} = \angle\mathrm{ABC} = 60^\circ$ より，△DBC は一辺の長さが 1 の正三角形である．ゆえに $\mathrm{CD} = 1$．

△ADC について，∠A の二等分線の性質より，$\mathrm{DP}:\mathrm{CP} = \mathrm{AD}:\mathrm{AC} = 1:\sqrt{3}$．これより $\mathrm{CP}:\mathrm{CD} = \sqrt{3}:\sqrt{3}+1$ だから，

$$\mathrm{CP} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\mathrm{CD} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

□

(3)（配点 18 点）

△ABC と点 D，E，F についてチェバの定理を用いることができるから，

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}} = 1$$

が成り立つ．D は AB の中点だから，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} = 1$ である．また，(1) より $\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ であ

る．これらを上の等式に代入して，$\mathrm{CF}:\mathrm{FA}=\sqrt{3}:2$ を得る．したがって，

$$\mathrm{FA}:\mathrm{CA}=2:2+\sqrt{3},$$
$$\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{CA}}=\frac{2}{2+\sqrt{3}}=4-2\sqrt{3}.$$

また，(2) より $\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{CD}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ である．以上より，

$$\begin{aligned}(\triangle\mathrm{APF}\,\text{の面積})&=(\triangle\mathrm{APC}\,\text{の面積})\times\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{CA}}\\&=(\triangle\mathrm{ADC}\,\text{の面積})\times\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{CD}}\times\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{CA}}\\&=(\triangle\mathrm{ABC}\,\text{の面積})\times\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}\times\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{CD}}\times\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{CA}}\\&=\left(1\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}\times\frac{3-\sqrt{3}}{2}\times(4-2\sqrt{3})\\&=\frac{\sqrt{3}}{8}(12-10\sqrt{3}+6)\\&=\frac{9\sqrt{3}-15}{4}.\end{aligned}$$

□

$\boxed{4}$ (1)（配点 8 点）

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ であるから，

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3=(a+b)^3+c^3.$$

この右辺は，等式 $A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$ の左辺において $A=a+b$，$B=c$ とおいたものに等しいから，

$$\begin{aligned}(a+b)^3+c^3&=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}\\&=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2).\end{aligned}$$

以上より，

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab-ac-bc).$$

□

(2)（配点 8 点）

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3)-3a^2b-3ab^2-3abc$ であるから，右辺の括弧内に (1) を用いることができる．その後，共通する因数で順次くくっていけば，

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab-ac-bc)-3a^2b-3ab^2-3abc\\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab-ac-bc)-3ab(a+b+c)\\ &= (a+b+c)\{(a^2+b^2+c^2+2ab-ac-bc)-3ab\}\\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).\end{aligned}$$

□

(3)（配点 24 点）

まず，$a>0$，$b>0$，$c>0$ のとき，$a^3+b^3+c^3-3abc \geqq 0$ であることを示す．(2) より，$a+b+c>0$ かつ $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc \geqq 0$ であることを示せば十分である．$a>0$，$b>0$，$c>0$ より，$a+b+c>0$ が成り立つ．また，

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\\ &=\left(\frac{1}{2}a^2-ab+\frac{1}{2}b^2\right)+\left(\frac{1}{2}a^2-ac+\frac{1}{2}c^2\right)+\left(\frac{1}{2}b^2-bc+\frac{1}{2}c^2\right)\\ &=\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(a-c)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2\\ &\geqq 0.\end{aligned}$$

最後の不等号では，実数の二乗は 0 以上であることを用いた．

以上で $a>0$，$b>0$，$c>0$ のとき，$a^3+b^3+c^3-3abc \geqq 0$ であることが示せた．これを用いて，求める不等式を示す．$x>0$ より，$a=\sqrt[3]{x}$ とおけば，$a>0$ である．同様に，$y>0$ と $z>0$ を用いて，$b=\sqrt[3]{y}>0$，$c=\sqrt[3]{z}>0$ とおく．この a，b，c は先の仮定を満たすから，

$$x+y+z-3\sqrt[3]{xyz}=a^3+b^3+c^3-3abc \geqq 0.$$

左辺の $-3\sqrt[3]{xyz}$ を移項して，求める不等式を得る． □

$\boxed{\text{5A}}$ (1)（配点 8 点）

$y=1-x^2$ を x について微分すると $y'=-2x$ より，点 P における接線の傾きは $-2s$ である．したがって，l の方程式は

$$l: y=-2s(x-s)+1-s^2=-2sx+(s^2+1).$$

m についても同様で,

$$m : y = -2tx + (t^2 + 1).$$

$\square$

(2)（配点 8 点）

l と m の方程式を連立して

$$-2sx + (s^2+1) = -2tx + (t^2+1) \Leftrightarrow -2(s-t)x + (s^2 - t^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (s-t)(-2x+s+t) = 0$$

を得る．さらに，$s < t$ より，これは $-2x + s + t = 0$ と同値である．x について解くことで R の x 座標が求まるので，$x = \dfrac{s+t}{2}$ とわかる．これを l の方程式に代入すれば,

$$y = -2sx + (s^2+1) = -s(s+t) + (s^2+1) = 1 - st.$$

以上より，$\mathrm{R}\left(\dfrac{s+t}{2}, 1-st\right)$ である．$\square$

(3)（配点 10 点）

l と m と放物線 C で囲まれた部分の面積を S_1，C と直線 PQ で囲まれた部分の面積を S_2 とおく．求める面積 S は S_1 と S_2 の和であるから，それぞれ計算する．直線 PQ の方程式は $y = -(s+t)x + 1 + st$ であるから,

$$S_2 = \int_s^t [1 - x^2 - \{-(s+t)x + 1 + st\}]dx = \frac{1}{6}(t-s)^3.$$

また，$s < t$ であったから,

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_s^{\frac{s+t}{2}} \left\{-2sx + s^2 + 1 - (1 - x^2)\right\} dx + \int_{\frac{s+t}{2}}^t \left\{-2tx + t^2 + 1 - (1-x^2)\right\} dx \\
&= \int_s^{\frac{s+t}{2}} (x^2 - 2sx + s^2)dx + \int_{\frac{s+t}{2}}^t (x^2 - 2tx + t^2)dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 - sx^2 + s^2x\right]_s^{\frac{s+t}{2}} + \left[\frac{1}{3}x^3 - tx^2 + t^2x\right]_{\frac{s+t}{2}}^t \\
&= \left\{\frac{1}{3}\left(\frac{s+t}{2}\right)^3 - s\left(\frac{s+t}{2}\right)^2 + s^2\left(\frac{s+t}{2}\right)\right\} - \left(\frac{1}{3}s^3 - s^3 + s^3\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{3}t^3 - t^3 + t^3\right) - \left\{\frac{1}{3}\left(\frac{s+t}{2}\right)^3 - t\left(\frac{s+t}{2}\right)^2 + t^2\left(\frac{s+t}{2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}(t^3 - s^3) + \left(\frac{s+t}{2}\right)\left\{-s\left(\frac{s+t}{2}\right) + s^2 + t\left(\frac{s+t}{2}\right) - t^2\right\} \\
&= \frac{1}{3}(t^3 - s^3) - \frac{1}{2}\left(\frac{s+t}{2}\right)(t^2 - s^2) \\
&= (t-s)\left\{\frac{1}{3}(t^2 + ts + s^2) - \frac{1}{4}(s+t)^2\right\} \\
&= \frac{1}{12}(t-s)\left\{4(t^2 + ts + s^2) - 3(s+t)^2\right\} \\
&= \frac{1}{12}(t-s)^3.
\end{aligned}
$$

したがって,

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{12}(t-s)^3 + \frac{1}{6}(t-s)^3 = \frac{1}{4}(t-s)^3.$$

□

(4)（配点 14 点）

l と m が直交する条件は $-2s(-2t) = -1$ である．よって，s と t は $st = -\dfrac{1}{4}$ を満たすように動く．この等式と仮定 $s < t$ より，$s < 0$ かつ $t > 0$ である．また，$-1 \leqq s$ であったから $-1 \leqq s < 0$ がわかる．これで t の動く範囲も求められて，$t = -\dfrac{1}{4s} \geqq \dfrac{1}{4}$ である．

相加平均と相乗平均の大小関係より，

$$S = \frac{1}{4}(t-s)^3 = \frac{1}{4}\left(t + \frac{1}{4t}\right)^3 \geqq \frac{1}{4}\left(2\sqrt{t \cdot \frac{1}{4t}}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

が成り立ち，等号成立の必要十分条件は $t = \dfrac{1}{4t}$ である．これは $4t^2 = 1$ と同値だから，$t \geqq \dfrac{1}{4}$ の範囲でこれを満たす値は $t = \dfrac{1}{2}$ のみ．

以上より，S の最小値は $\dfrac{1}{4}$ で，そのときの $t = \dfrac{1}{2}$，$s = -\dfrac{1}{4t} = -\dfrac{1}{2}$ である．□

$\boxed{\text{5B}}$ (1)（配点 10 点）

$f'(x) = 1 - \dfrac{2}{x}$ より，$f'(x) = 0$ となる点は $x = 2$ のみ．極値は $f(2) = 2 - 2 - 2\log\dfrac{2}{2} = 0$ である．また，$0 < x < 2$ のとき $f'(x) < 0$，$x > 2$ のとき $f'(x) > 0$ であるから，$f(x)$ の増減表は以下のようになる．

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	0	↗

したがって，$x>0$ に対して $f(x) \geqq 0$. $\square$

(2)（配点 15 点）

$u(x)=2(1+e^{-2x})^{-1}$ より，

$$\begin{aligned} u'(x) &= -2(1+e^{-2x})^{-2}\cdot(1+e^{-2x})' \\ &= -2(1+e^{-2x})^{-2}\cdot(-2e^{-2x}) \\ &= \frac{4e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2} \end{aligned}$$

である.

次に，$g(x)=f(u(x))$ の導関数を求める．$f(x)=x-2-2\log\dfrac{x}{2}$ より，真数条件から $f(x)$ の定義域は $x>0$ である．$u(x)>0$ であるから，$x>0$ に対して $g(x)$ が定義される．$g(x)$ は

$$g(x)=\frac{2}{1+e^{-2x}}-2-2\log\frac{2(1+e^{-2x})^{-1}}{2}=u(x)-2+2\log(1+e^{-2x})$$

であるから，

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)-0+2\cdot\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \\ &= \frac{4e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}-\frac{4e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \\ &= -\frac{4e^{-4x}}{(1+e^{-2x})^2}. \end{aligned}$$

$\square$

(3)（配点 15 点）

(2) より

$$\left(\frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)^2=\frac{4e^{-4x}}{(1+e^{-2x})^2}=-g'(x)$$

であるから，

$$I_n=\int_0^n\left(\frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)^2dx=\int_0^n\{-g'(x)\}dx=-[g(x)]_0^n=-g(n)+g(0).$$

各項は

$$\begin{aligned} g(n) &= \frac{2}{1+e^{-2n}}-2+2\log(1+e^{-2n}), \\ g(0) &= \frac{2}{1+e^0}-2+2\log(1+e^0)=-1+2\log 2 \end{aligned}$$

と求まるから，

$$I_n = -\frac{2}{1+e^{-2n}} + 2 - 2\log(1+e^{-2n}) - 1 + 2\log 2$$

である．ここで，$\lim_{n\to\infty} e^{-2n} = 0$ より，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+e^{-2n}} = 2,$$
$$\lim_{n\to\infty} \log(1+e^{-2n}) = 0$$

がわかる．よって，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} I_n &= \lim_{n\to\infty} \left\{-\frac{2}{1+e^{-2n}} + 2 - 2\log(1+e^{-2n}) - 1 + 2\log 2\right\} \\ &= -2 + 2 - 0 - 1 + 2\log 2 \\ &= 2\log 2 - 1.\end{aligned}$$

□