

学校数学(算数)における意義ある数学(算数)的活動の実践に関する研究

渡邊 伸樹

(京都教育大学 数学科)

A Study on Practice of Meaningful Mathematical Activity in School Mathematics

Nobuki WATANABE

2009年11月30日受理

抄録：新学習指導要領(小・中学校は2008年，高等学校は2009年に公示)では、「数学(算数)的活動」が重要視され，小学校・中学校・高等学校では，必ず実践することになった。しかしながら，「数学(算数)的活動」とは本質的にどのようなものかという議論は少ない。そこで本稿では，意義ある「数学(算数)的活動」を探るため，まずその型の分類を行った。そしてその中で特に小学校での応用に関する実践事例の考察を行った。その結果，それらの実践は子どもにとって意義ある算数的活動の実践であることが示された。

キーワード：学校数学(算数)，数学(算数)的活動，学習目的，学習形態，学習段階

I. はじめに

新しい小中学校の学習指導要領が2008年に，高等学校の学習指導要領は2009年に正式に公示され，小学校では2011年度，中学校では2012年度から完全実施され，高等学校では2013年度の第1学年から学年進行で実施される。算数・数学科では，内容が大きく変化し，現場では対応が迫られている。特に重視されているのが「数学(算数)的活動」の実践である。いわゆる「知識」だけではない「生きる力」を数学(算数)的活動で児童・生徒に獲得させることを目指すものである。しかしながら，「数学(算数)的活動」という用語が使われたのは何も今回の改訂からではない。さらにこの言葉は使われていないものの同じような概念の活動はかなり以前から行われていた。では，なぜ今になってこれだけ前面に押し出されているのであろうか。それは，学校現場で意義ある数学(算数)的活動が実践されておらず，児童・生徒に本来の学力がついていないことであろう。また，それが学校現場で実践できにくい背景には，そもそも数学(算数)的活動とはどのようなものであるのかを実践者が議論できていないことが考えられる。そこで，本稿では，児童・生徒に意義ある数学(算数)的活動とはどのようなものであるのかを議論していく。

II. 学習指導要領における数学(算数)的活動

新学習指導要領で，数学(算数)的活動が前面に強調されるようになった。例えば，小学校の学習指導要領の目標では，「算数的活動を通して，数量や図形についての基礎的・基本的な知識及び技能を身に付け，日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考え，表現する能力を育てるとともに，算数的活動の楽しさや数理的な処理のよさに気づき，進んで生活や学習に活用しようとする態度を育てる。」と冒頭にでてくる。同様に中学校の学習指導要領では，「数学的活動を通して，数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則についての理解を深め，数学的な表現や処理の仕方を習得し，事象を数理的に考察し表現する能力を高めるとともに，数学的活動

の楽しさや数学のよさを実感し、それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる。」、高等学校でも、「数学的活動を通して、数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め、事象を数学的に考察し表現する能力を高め、創造性の基礎を培うとともに、数学のよさを認識し、それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。」といずれの目標でも「数学的活動」が冒頭に掲げられ、「数学的活動」を通して数学を学習することになっている。

では、学習指導要領では具体的にはどのように「数学(算数)的活動」を定義しているのでしょうか。小学校の学習指導要領解説(算数編)では「算数的活動には、様々な活動が含まれ得るものであり、作業的・体験的な活動など身体を使ったり、具体物を用いたりする活動を主とするものがあげられることが多いが、そうした活動に限られるものではない。算数に関する課題について考えたり、算数の知識をもとに発展的・応用的に考えたりする活動や、考えたことなどを表現したり、説明したりする活動は、具体物などを用いた活動でなくとも算数的活動に含まれる。」としている。一方、中学校の学習指導要領解説(数学編)では「数学的活動とは、生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営みを意味している。ここで「目的意識をもって主体的に取り組む」とは、新たな性質や考え方を見いだそうとしたり、具体的な課題を解決しようとしたりすることである。」とし「このような数学的活動には、試行錯誤をしたり、資料を収集整理したり、観察したり、操作したり、実験したりすることなどの活動も含まれ得るが、教師の説明を一方的に聞くだけの学習や、単なる計算練習を行うだけの学習などは含まれない。数学的活動のうち、特に中学校数学科において重視しているのは、既習の数学を基にして数や図形の性質などを見いだし発展させる活動、日常生活や社会で数学を利用する活動、数学的な表現を用いて根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動である。」としている。高等学校の学習指導要領解説(数学編 理数編)では「数学的活動とは、数学学習にかかわる目的意識をもった主体的な活動のことであるが、第3款の3で規定しているように、高等学校では特に次の活動を重視している。・自ら課題を見だし、解決するための構想を立て、考察・処理し、その過程を振り返って得られた結果の意義を考えたり、それを発展させたりすること。・学習した内容を生活と関連付け、具体的な事象の考察に活用すること。・自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり、議論したりすること。なお、数学的活動は、コンピュータなどを積極的に活用することによって一層充実したものにすることができる。」としている。すなわち、小学校では、作業・体験活動だけではなく、思考活動も重要であり、中・高等学校では思考活動だけではなく、生活と関わる具体的な活動を行う必要もあることを示しているといえる。したがって、表面的ではなく、児童・生徒にとって本当に意義ある数学(算数)的活動を実践することが望まれていることがわかる。

Ⅲ. 数学的(算数)的活動の分類

1. 数学(算数)的活動の分類

数学(算数)的活動について、学習指導要領では具体例がいくつかしか挙げられていないが、いろいろな型に分類できるはずである。小学校の学習指導要領では、形態などに着目し「作業的な活動」、「体験的な活動」、「具体物を用いた活動」、「調査する活動」、「探究的な活動」、「さらに発展させて考える活動」、「場面に応用する活動」、「総合的に用いる活動」と整理しており、中学校では、「数や図形の性質などを見いだす活動」、「数学を利用する活動」、「数学的に説明し伝え合う活動」としている。しかし、これでは分類の観点が十分ではないと考える。本来、児童・生徒にとって意義ある学習にするためには、最低限、学習の目的面、学習の形態面、学習の段階面

(1) 数学内—思考—素地(内思素型)

未習の数学(算数)問題を体験的に系統性等には関係なく解くものである。例えば、パズルやゲーム(Nintendo DS など)で、その数学を学習するのではなく体験的に今まで習っていない学習を解くものである。小学校では、連立方程式を学習していない段階である小学生が図などを利用してあてはめたりしながら連立方程式で解ける問題を解くこと等がこれにあたる。中学校でも同様に、高等学校で学習する内容の定理(方べきの定理等)を直観的に証明すること等が考えられる。

(2) 数学内—思考—一般(内思一型)

中・高等学校でよく行われている「数学的学習」である。例えば、小学校では、四角形の内角の和が360度であることを演繹的に証明することにより、四角形の内角の和が360度であることを理解する学習等がこれにあたる。中学校ではピタゴラスの定理を導きだしたり、ある等式が成立するのを導き出すために、今まで習った定義や定理・性質などを利用して導き出す学習等がこれにあたる。

(3) 数学内—思考—応用(内思応型)

既習の内容を活かして、未習の発展的な性質や定理、特徴の発見をする学習である。小学校では規則的にならんだ数の和の求め方を今までの学習を活用して、例えば等差数列的に導き出す学習等であり、中学校では、1つの証明を別の新たな方法を考える学習等がこれにあたる。

(4) 数学内—身体—素地(内身素型)

未習の数学(算数)の内容を作業を通して体験的に学ぶものである。例えば、小学校では、多面体を学習しないが、剛体から多面体を作成し、さらにそれから展開図を作成し多面体モデルを製作することから多面体を体験学習すること、中学校では、学習していない関数(例えば1次や2次でない関数)を身の回りにある事象から探してきて、グラフ化することなどからそれらの関数を体験学習すること等が挙げられる。

(5) 数学内—身体—一般(内身一型)

学習する数学の内容を作業を通して学ぶものである。小学校では、数の分解・合成器を利用しての数の性質(数の分解・合成)を学習すること等が挙げられ、中学校では、作図をしながら証明を行う学習や、実際に試行を行って統計的確率を求めること等が挙げられる。

(6) 数学内—身体—応用(内身応型)

既習の数学(算数)の内容を作業を通して数学(算数)へ発展させるものである。例えば、小学校では拡大図の作図を行う際に相似の理解へ発展させる学習、中学校では、既習の相似の概念を活かして自己相似(フラクタル)図形の理解へ発展させる学習等が考えられる。

(7) 数学外—思考—素地(外思素型)

日常へ活かせる数学(算数)の未習の内容を体験的に学ぶものである。例えば、小学校、中学校で統計の計算方法を利用(グラフ電卓やパソコンの利用も可)して、いろいろな事象の傾向の分析をする学習等が考えられる。

(8) 数学外—思考—一般(外思一型)

日常へ活かせる数学(算数)の内容を学習するものである。例えば、小学校では身近な不定形の求積方法を考える学習、中学校では、身近な問題を解くのに方程式で解くことから方程式を学習すること等が考えられる。

(9) 数学外—思考—応用(外思応型)

日常へ活かせる既習の数学の内容を発展させるものである。小学校では、論理の学習を利用して推理小説を作成すること等が考えられる。中学校では、方程式や関数の概念を利用して、さまざまな身近な事象を思

考的に分析すること等が考えられる。

(10) 数学外—身体—素地 (外身素型)

日常へ活かせる未習の数学(算数)内容を体験的に学ぶものである。例えば、小学校では、学習していない量の測量器具を利用していろいろな量の抽出学習や運動模様(線対称や点対称)の模様作成の学習、中学校では、三角比を利用して多面体の模型製作等が挙げられる。

(11) 数学外—身体—一般 (外身一型)

日常へ活かせる数学(算数)の内容を学ぶものである。例えば、小学校では、立体模型(椅子・すべり台等)の製作から二面角を学ぶ学習、同様に中学校では、日時計の制作から三垂線の定理を学ぶ学習等が考えられる。

(12) 数学外—身体—応用 (外身応型)

日常へ活かせる既習数学を応用するものである。例えば、小学校では、オゾンホールの求積から地球温暖化の原因を分析する学習等が考えられる。中学校では、身近な事象を実際に測定や測量をすることから、関数や統計などで分析する活動等が考えられる。

以上はあくまでも簡単な内容であり、さらに内容を精選および充実していく必要、また系統的なものとしていく必要がある。

IV. 算数的活動の具体的実践事例

ここで、さらに詳しくその実践内容を考える。ここでは、とりわけ数学(算数)的活動のうち、小学校の応用活動に焦点をあてて考える。それは現在の社会では特に数学(算数)を活かすことが求められているからである。それ以外の型の活動は稿を改めて議論することにする。

1. 数学内・思考・応用活動 (内思応型) — 『分数の除法』の学習—

分数の除法の演算について、除数の逆数を乗数として演算しても結果が等しい理由(なぜひっくり返してかけても同じ答えになるのか)を子どもが数学的な「証明」を意識しながら学習するものである。実践の具体的な内容は次のようである(渡邊(2007))。

- (1) 日時： 2003年5月， 5授業時間(1授業時間は45分)
- (2) 対象児童：大阪府公立小学校， 6年1組・2組 (各29人)
- (3) 展開：

I：単位分数の定義

- ①分数×整数， ②分数×単位分数， ③分数×分数， ④分数の連続乗法

II：逆数の定義

- ①分数×逆数， ②分数 $a \times$ 分数 $b \times b$ の逆数=分数 a ， ③ $a = \square \times b \rightarrow \square = a \times b$ の逆数

III：除法の定義($a \div b$ は a がある数の b 倍)

- ①分数 $a \div$ 分数 $b = \square \rightarrow \square \times$ 分数 $b =$ 分数 a ， ②分数 $a \div$ 分数 $b =$ 分数 $a \times b$ の逆数

- (4) 教科書 (オリジナル教科書, Fig.2) の具体的な内容：



Fig.2:テキスト表紙

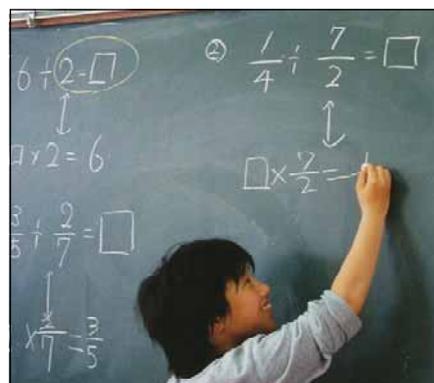


Fig.3:分数の除法の説明をする

§ I 分数のかけ算 1 (単位分数, 分数×整数, 分数×単位分数, 分数×分数)

§ II 分数のかけ算 2 (分数の連続乗法)

§ III 分数のかけ算 3 (逆数, 逆数の性質)

§ IV 分数のかけ算 4 (乗法の代数的性質)

§ V 分数のわり算 (乗法と除法の関係, 分数の除法)

(Fig.3,4)

これらの実践後に実践内容の確認テストを行った結果, 6年1組の平均点は92.8点, 2組は88.5点であった。

また, 授業後にとった子どもたちの感想文の一部は, 以下のものである。

- ・分数のかけ算, わり算, 約分の説明がわかりやすかった。
- ・授業はわかりやすく楽しかった。もっとやりたかった。
- ・渡邊先生の算数めっちゃめっちゃわかりやすかった。またこういう機会があれば, もっと算数がおもしろくなりそう。

以上ことから本実践について次のことがわかる。

- ・分数の乗法除法では, 代数的な導入は6年生で理解できる。
- ・この導入での教育では, 分数の乗法除法が理解できるにとどまらず, 子どもたちが, 分かりやすい, 楽しいと考え, 子どもの認識に見合っている。

これらのことから, 「分数の除法」の発展的な内思応型の算数的活動は子どもにとって学習意義があることがわかる。

2. 数学内・身体・応用活動 (内身応型) - 『相似図形の作成』 -

例えば「フラクタル」等の図形を縮図と拡大図を利用して描くものである(守屋誠司(1994)『算数であそぼう4』, 岩崎書店に詳しい)。

3. 数学外・思考・応用活動 (外思応型) - 『推理小説作成』 -

この学習は, 論理の学習をした後に, それを日常へ活かして自分なりの「推理小説」を作成するものである。いわゆる論理の日常への活用といえる。渡邊(1999)の実践は次のようである。

- (1) 日時: 1999年1~2月(全18授業時間+朝の学習7回)(1授業時間は45分)
- (2) 対象: 大阪府公立小学校, 5年1組(27名)
- (3) 展開: 命題, 否定, 合接, 離接, 真理表, 条件文, 恒真命題, 推論形式, 非現実的な命題, 推理小説作成問題等
- (4) オリジナルのテキスト『探偵への道』(Fig.5)の具体的内容:

1. 謎は解けるのか?
2. 命題ってなんだ?
3. 命題の演算について(否定, 真理表, 合接, 離接(記号論理))
4. 等しい命題(真理表で)
5. 条件文



Fig.4: 分数の除法の問題を解く



Fig.5: テキスト表紙

6. 恒真命題 (いつでも正しい)
7. 推論形式 (5つの推論形式) (Fig.6)
8. くじらもとべるはず (非日常の推論)
9. 搜索 (演繹推論)

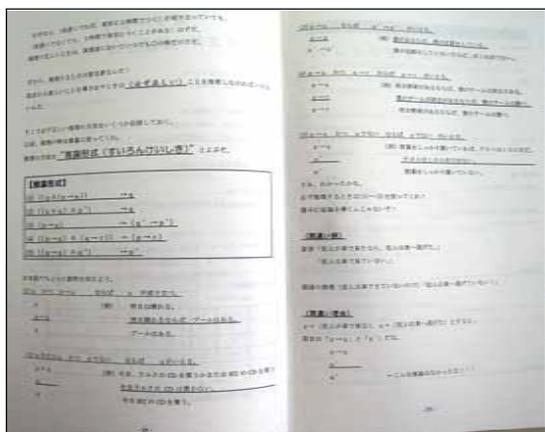


Fig.6:テキスト内容(推論形式部分)

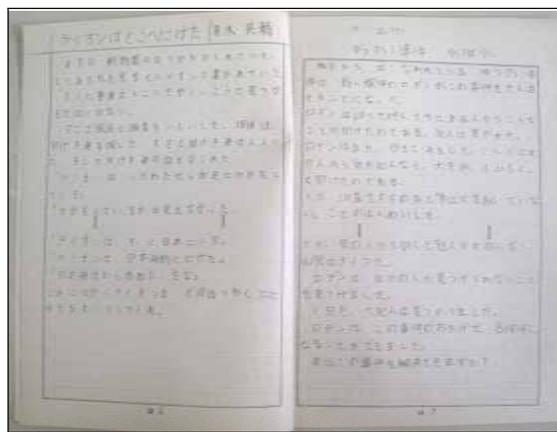


Fig.7:子どもの推理小説作品集

テキストを学習したのち、最後には、それらの論理を使い、各自推理小説問題作成を試み、推理小説集を作成した(Fig.7)。その後クラス全員で問題を解きあった。(子どもの推理小説作品の一部：『元気君と太郎君が、「江戸時代はあるのか、ないのか」と言うことでもめていた。だがそれを聞いていた江時山戸代君はなぞを解決しようとした。まず、一人目に聞くと「江戸時代があるなら日本はある」ということと、「江戸時代は現在のことか過去のことだ」ということを聞きつけた。(中略) 江時山戸代君はいろいろ考えて、このもめあいをとめ、二人もなっとくしました。さあ、君もなぞをといて江時山戸代君みたいになろう！』)

これらの実践後に実践内容の確認テストを行った結果、子どもの正答率はほとんど 90%を超え(事前では 0%のものも数多くあった)、文字、記号(論理演算子)を理解すること、真理表を意味まで理解して作成することができること、文書を記号化して推論をすることが可能であること、非現実的な命題についても理解でき、推論できること、4つのパターンの推論形式を記号、文章で利用することが可能であることが明らかとなった。

また、授業後にとった子どもたちの感想文の一部は以下のようなものである。

- ・親に問題を出しても、答えられないところが、親に勝った気分でもっとうれしかった。
- ・ファイルを持って帰って家でやりました。
- ・この勉強を小学生のうちにやっておいてよかったと思います。
- ・お母さんやお父さんに問題を出すことができるようになった。記号も自分であやつれるようになった。

以上のことから、内容を理解しさらに積極的に日常にまで活用しようとしていたことがわかる。したがって、この外思応型の算数的活動は子どもにとって学習意義があることがわかる。

4. 数学外・身体・応用活動(外身応型) — 『不定形の求積』 —

この実践は、不定形を平行線での分割から台形近似し、求積するものである。最終的にはこの求積方法を利用し、「オゾンホール」を求積することから、温暖化の原因を分析するものである。いわゆる日常事象の分析である。実践内容は以下のようなものである(渡邊(2003))。

(1)日時：2001年12月、15授業時間程度(1授業時間は45分)

(2)対象：大阪府公立小学校，5年1組（34名）

(3)展開

- I.不定形の台形分割による求積方法について(1時間)
- II.「木の葉」の台形分割による面積の求積（電卓使用）(1時間)
- III.Excelの基本操作練習等(1時間)
- IV.身の周りの不定形の探索と面積の求積(2時間)
- V.オゾンホールについて(1時間)
- VI.オゾンホール及び南極の面積の求積（5時間）
- VII.ペーパーテストと実技テスト(2時間)
- VIII.オゾン層に関する環境新聞作りと感想文執筆(2時間～)

以下，一部の具体的な実践について述べる。

・「IV.身の周りの不定形の探索と面積の求積」の実践内容について

土曜・日曜の休日を利用して，面積を求積したい身の周り不定形を探索課題を与えた。探索対象が自由ということもあり，子どもたちはイチゴ，紅葉など変わった葉，また，ミカンの皮，リンゴの皮，手袋，パンケース，磁石など色々なものを探してきた。一人ひとり違った課題をもち，それぞれ台形分割により面積を求積することとした。求積手順は，各自それぞれの不定形を紙に写し台形分割を行う。そして Excel シート（Excel のワークシートを紙にコピーしたもの）に分割した一つずつの台形の辺を測定していく（Fig.8）。最終的に，測定した値をもとに Excel に入力し，求積する手順をふんだ。



Fig.8:手袋の面積の求積

・「VI.オゾンホール及び南極の面積の求積」の実践内容について

オゾンホールを学習する中で，オゾンホールが年々拡大していることがわかった。子どもたちの中には「もしかして，オゾン層が全部なくなるのも時間の問題？」，「先生，今から何にもフロン出さなかったら元に戻るのにどれぐらいかかるの？」といった疑問がでてきた。しかしながら，どれぐらいの大きさがあるのか，またどれぐらい広がっているのかは資料にかかれていなかった。子どもたちの中から「オゾンホールを台形分割したら面積ぐらい簡単にでてくるな。」という意見が出てきた。そこで，オゾンホールの面積を台形分割により算出することとした（Fig.9）。また，オゾンホールの実際的面積は，南極の実際的面積との比から算出することとした。一般にオゾンホールは南極上空のものであり，オゾンホールと同時に南極が描かれているのが常である。南極は地図帳などを活用すればすぐに実際的面積は知ることができる。そこで，南極および 1985 年，



Fig.9:オゾンホールの面積を求める

1987年、1998年のオゾンホール面積、すなわち4つの面積を求積することとした。パソコンの台数の関係上2人1組となり、4つの面積を求めることとなったが、各個人が独力で求積ができる力を身につけるため、1人最低1つは必ず責任をもって面積を求積することとした。南極及びオゾンホールを台形分割し、各辺を測定するのは、ほぼ1時間で終わった。Excelで4つの面積を求積するには、速い子どもたちは1時間、遅い子どもたちで4時間かかった (Fig.10)。

・「VIII.オゾン層に関する環境新聞作りと感想文執筆」の実践内容について

オゾンホールの学習と、オゾンホールの面積の求積により子どもたちは地球環境に非常に関心を持つに至った。そこで、他の子ども及び保護者に自分の調査を発表することとし、新聞作りに取り組んだ。内容は、求積した面積を梃子とし、オゾン層に関する自由な内容とした。子どもたち全員が次のようないろいろ面白い新聞を創り上げた (Fig11, Fig.12)。作った新聞は、新聞集としてまとめて、子ども及び保護者に配布した。

	上底	下底	高さ	面積
1	0	1	0.2	0.1
2	1	0.3	0.5	0.325
3	0.3	0.3	0.6	0.18
4	0	2	0.5	0.5
5	3	2	0.4	1.2
6	4.3	3.5	0.5	1.95
7	0	1	0.4	0.2
8	3.3	4.2	0.4	1.5
9	4.2	4.4	0.6	2.58
10	2.1	1.7	0.5	0.95
11	2	1.7	0.5	0.925
12	0.3	2	0.5	0.575
13	0.7	0.5	0.7	0.42
14	2	2.1	1.3	2.665
15	0.5	0.5	1	0.5
16	2	3	2.1	5.25
17	0.5	0.6	0.3	0.165
18	1	2.3	0.6	0.99
19	4	4.5	0.8	3.4
20	1	1.5	0.2	0.25
21	0	1	0.2	0.1
22	9.2	8.6	1.3	11.57
23	8.6	7	1.4	10.92
24	2.1	0	0.6	0.63
25	4.7	0	1.1	2.585
26	0.8	0	0.2	0.08
27	0	1	0.5	0.25
28	0	1	0.2	0.1
29	2.5	3.4	0.8	2.36
30	3.4	3.7	0.9	3.195
31	3.7	3.1	0.9	3.06
32	3.1	2	0.7	1.785
33	1.5	0	0.2	0.15
南極の面積				61.41

Fig.10:オゾンホールの求積結果

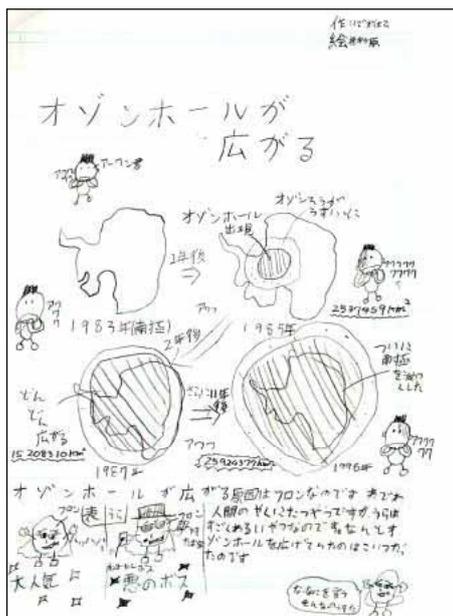


Fig.11:子どもの作成した新聞の1 P

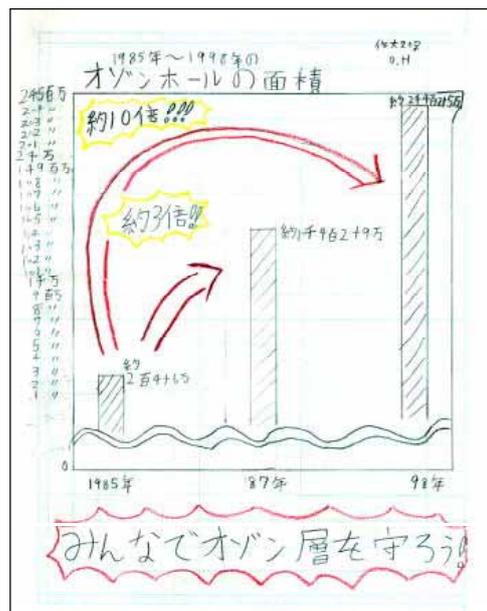


Fig.12:グラフ化した子どもの新聞の1 P

これらの実践後に実践内容の確認テスト (パソコンの実技も含めて) を行った結果、子どもの正答率は 87.9% であり、不定形の求積の数学的内容とパソコンの活用の理解ができることが明らかとなった。

また、授業後にとった子どもたちの感想文の一部は以下のようなものである。

- ・私はオゾンホールの面積の勉強で、オゾンホールがどれだけ大きいか分かりました。(中略) この勉強でオゾン層の大切さを知りました。私はオゾン層を大切にしようと思いました。
- ・私は、オゾンホールの実際の面積を測ってみて、地球の環境がかなり危ない事を知った。(中略) オゾンホールを大きくしないように私たちがしないといけないと思った。

- ・オゾンホールが広がっているのは知っていたけれど、実際の面積だととても大きいのでびっくりしました。
- ・オゾンホールの求め方は意外に難しかったけど、コンピュータで求めて面白かった。
- ・葉の面積の求め方とコンピュータの使い方さえマスターすれば、どんな面積でも簡単に求めることができることが分かった。
- ・森林はどれぐらい破壊されているのか、また川はどれぐらい汚れているのかの面積を求めて、お母さんに発表したい。

感想文から、子どもたちは、不定形の求積方法を理解するだけにとどまらず、地球環境に関心を持ち、自ら地球を守っていかなければならないという意識を持つに至ったことが理解できる。さらに、新しい課題を自分で持つ子どもも現れたことが分かる。これらのことから、この外身応型の算数的活動は子どもにとって学習意義があることがわかる。

V. おわりに

本稿では、学校数学(算数)において児童・生徒に意義ある数学(算数)的活動について議論をしてきた。まず数学(算数)的活動の型を分類し、そしてその中で小学校の応用についての実践を考えた。実践した内容はそれぞれ、子どもにとって学習意義があることが示された。

しかし、児童・生徒が学校数学(算数)の内容を本質的に理解するには、1つの型の実践だけではなく、各学年で前述した活動の全ての型を1年間を通して最低限一通り学習することが必要となる。言い換えれば、各学年で適した題材により、1年間を通して全ての型を指導する必要がある。

したがって、今後は、それぞれの型の教育内容についてさらに議論を深めていくこと、またその内容が妥当であるかを実際に教育実験から明らかにすることが課題として挙げられる。

謝辞

本研究は科研費(21500835)及び、科研費(21730694)の助成を受けたものである。

引用・参考文献

黒田恭史編著(2008)『数学科教育法入門』, 共立出版

Max Stephens・柳本哲(2001)『総合学習に生きる数学教育』, 明治図書

文部科学省(2008)『小学校学習指導要領解説 算数編』, 東洋館出版社

文部科学省(2008)『中学校学習指導要領解説 数学編』, 教育出版

文部科学省(2009)『高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編』, 実教出版

渡邊伸樹(1999)「小学校における論理の教育」, 数学教育学会『研究紀要』Vol. 40/ No. 1・2, 11-18

渡邊伸樹(2003)「代数の体系化をめざして-そのII-」, 数学教育学会『数学教育学会誌』Vol. 43 /No. 3・4, 5-15

渡邊伸樹(2007)「日本における分数教育の問題点とその打開策について」, 横地清他編『中日近現代数学教育史』第六巻, ハンカイ出版, 59-67

横地清(2006)『教師は算数授業で勝負する』, 明治図書