SSC活動記録　A　「数学クラブ」

１．実施状況

①人数、活動日

本年度の数学クラブは顧問２名、部員 21 名で構成されている。（昨年度は顧問２名、部員 19 名）
また、毎週月曜日、水曜日の放課後に活動してきた。（昨年度も同じ）

②活動内容

数学クラブではより高度な数学的能力(直観的発想能力、論理的説明能力、表現力等)の開発を目指している。その目的を実現するには、直観力・論理展開力を必要とする数学オリンピックの問題に取り組ませるのが適切と考えた。

具体的には、４月以来 10 ヶ月間、2006 年数学オリンピック予選問題 12 問を考え続けてきた。その結果、クラブ全体としては第 1 問から第 11 問(第 10 問を除く)までの解を考え出すことができた。またそれらの中には根気よく考えた解も多かった。

さらに、「数学オリンピックに参加し、より高次の成績を収めるように指導」(注) した。その結果 14 名が 2007 年数学オリンピック予選に参加した（昨年は 8 名)。

１月 25 日には、校内での SSC の発表会に 2007 年数学オリンピック予選問題第４問について解説した。１年間かけて考えた 2006 年数学オリンピック予選問題の中から発表するのも意味のあることではある。しかし、まだ詳しい解答が得られない中で、クラブ員が自信を持って発表できるまでに考えることが、大切だと考えた。複数の回答が考えられていたものを選んで解説した。

● 活動の様子

実際に生徒が行った解答を紹介する。

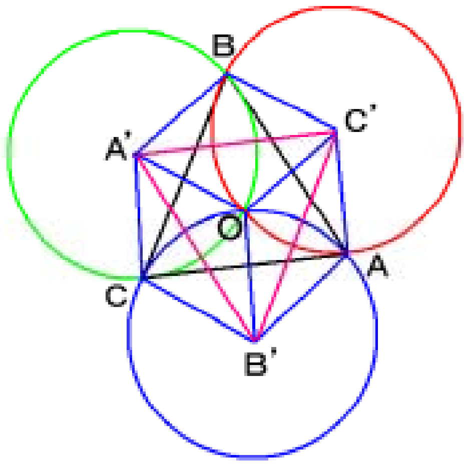
2006 年数学オリンピック国内予選問題９

解答１が、最初に考えついたもので、ほとんどの生徒がこの解法で解いていた。解答２は、図から、円を発想する点が、ユニークであると考えた。

問題９

$BC=5$，$CA=7$，$AB=8$ である三角形 ABC の内部に点 O をとる。三角形 OBC の外接円，三角形 OCA の外接円，三角形 OAB の外接円の半径がすべて等しいとき、その等しい半径を求めよ。

解答１



$AB=8$，$BC=5$，$CA=7$，

四角形 $A'BC'O$ と四角形 $AB'OC'$ はひし形より、

$A'B \,//\, B'A$ かつ $A'B = B'A$

よって四角形 $A'BAB'$ は平行四辺形である。

$A'B' = BA = 8$

同様に、$B'C' = BC = 5$，$C'A' = CA = 7$

ヘロンの公式から　$\triangle A'B'C' = \sqrt{10\cdot 3\cdot 2\cdot 5} = 10\sqrt{3}$ …①

次に、$\triangle A'B'C'$ の外接円の半径を R とおくと，

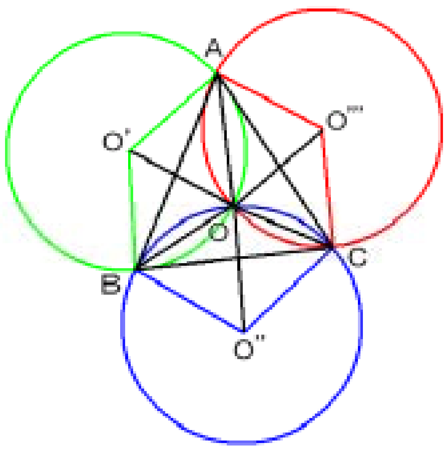
正弦定理より

$$\frac{5}{\sin A'} = 2R \Leftrightarrow \sin A' = \frac{5}{2R}$$

これより、$\triangle A'B'C' = \frac{1}{2}\cdot A'C'\cdot A'B'\cdot \sin A' = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8\cdot \frac{5}{2R} = \frac{70}{R}$ …②

①　②より、$10\sqrt{3} = \frac{70}{R} \Leftrightarrow R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

R はまわりの外接円の半径でもあるので、求める値は $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$



解答２

$\triangle OAB$ の外接円の中心を O'，$\triangle OBC$ の外接円の中心を O''，$\triangle OCA$ の外接円の中心を O''' とし、

$\angle O'AO = \angle O'OA = a$，$\angle O'BO = \angle O'OB = b$，

$\angle O''BO = \angle O''OB = c$，$\angle O''CO = \angle O''OC = d$，

$\angle O'''CO = \angle O'''OC = e$，$\angle O'''AO = \angle O'''OA = f$

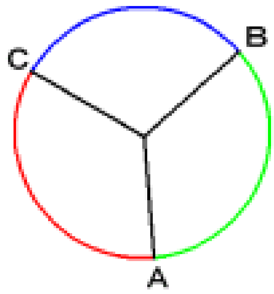
とおくと、

$a + b + c + d + e + f = 360°$

$\angle AO'B + \angle BO''C + \angle CO'''A = 720° - 360° = 360°$

円 O'，円 O''，円 O''' は半径が等しいので、

扇形 $O'AB$ と扇形 $O''BC$ と扇形 $O'''CA$ を合わせると円ができる。



したがって、$\triangle ABC$ の外接円の半径を求めればよい。

余弦定理より，

$$\cos A = \frac{49+25-64}{2\cdot 7\cdot 5} = \frac{1}{7}$$

相互関係から，

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\frac{1}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

正弦定理より，

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}} = \frac{14}{\sqrt{3}} \qquad R = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

2007 年数学オリンピック国内予選問題４

解答１は、a, b が ２ 桁の整数であることを最初に利用した解答である。解答２は整数に関する方程式でよく用いられる式変形を利用した解答であるが、文字整数 m をかけるという発想はむずかしかったようである。

問題４

n は十の位が 0 でない４桁の正の整数であり、n の上２桁と下２桁をそれぞれ２桁の整数と考えたとき、この２数の積は n の約数となる。そのような n をすべて求めよ。

解答Ⅰ

n の上２桁の整数を a，下２桁の整数を b とすると、$n = 100a + b$ である。

２数の積 ab が n の約数であるので、$100a + b = mab$ となる。（m は自然数）

両辺を a で割って、$100 + \dfrac{b}{a} = mb$ ……①

a,b はともに２桁の整数であるので、$\dfrac{10}{99} \leq \dfrac{b}{a} \leq \dfrac{99}{10}$ であり、mb は整数。

よって $\dfrac{b}{a}$ は１～９の整数である。

b は２桁であるので、①より、m は２以上の整数である。よって、mb は素数ではないため、$100 + \dfrac{b}{a}$ は素数ではない。

したがって、$100 + \dfrac{b}{a} \neq 101, 103, 107, 109$ となり、$\dfrac{b}{a} \neq 1, 3, 7, 9$ 、

つまり $\frac{b}{a}=2,4,5,6,8$ のいずれかである。

(i) $\frac{b}{a}=2$ のとき、mb=102 なので、　(m,b)=(2,51),(3,34),(6,17)である。

$\frac{b}{a}=2 \Leftrightarrow \mathrm{b}=2\mathrm{a}$ から、b は偶数。よって、(m,b)=(2,51),(6,17)は不適

(m,b)=(3,34)とすると、

(a,b)=(17,34)のとき 17 × 34=578 は 1734 の約数であるので、条件を満たす。

(ii) $\frac{b}{a}=4$ のとき、mb=104 なので、　(m,b)=(2,52),(4,26),(8,13)

$\frac{b}{a}=4 \Leftrightarrow \mathrm{b}=4\mathrm{a}$ から、b は４の倍数。よって、(m,b)=(4,26),(8,13)は不適

(m,b)=(2,52)とすると、

(a,b)=(13,52)のとき　13 × 52=676 は 1352 の約数であるので、条件を満たす。

(iii) $\frac{b}{a}=5$ のとき、mb=105 なので、　(m,b)=(3,35),(5,21),(7,15)

$\frac{b}{a}=5 \Leftrightarrow \mathrm{b}=5\mathrm{a}$ から、b は５の倍数。よって、(m,b)=(5,21)は不適

m=3 のとき、(a,b)=(7,35)　a は２桁の整数なので、不適。

m=7 のとき、(a,b)=(3,15)　a は２桁の整数なので、不適。

(iv) $\frac{b}{a}=6$ のとき、mb=106 なので、　(m,b)=(2,53)

$\frac{b}{a}=6 \Leftrightarrow \mathrm{b}=6\mathrm{a}$ から、b は６の倍数。よって、(m,b)=(2,53)は不適。

(v) $\frac{b}{a}=8$ のとき、mb=108 なので、　(m,b)=(2,54),(3,36),(4,27),(6,18),(9,12)

$\frac{b}{a}=8 \Leftrightarrow \mathrm{b}=8\mathrm{a}$ から、b は８の倍数。よって、すべて不適。

以上より、

(a,b)=(13,52)のとき　n=1352,

(a,b)=(17,34)のとき　n=1734　である。

解答２

$\mathrm{n}=100\mathrm{a}+\mathrm{b}$　(a,b は２桁の整数)　問題文より n は b の倍数なので $100\mathrm{a}+\mathrm{b}=\mathrm{mab}$ と表せる

$0=\mathrm{mab}-100\mathrm{a}-\mathrm{b}$　(m は整数)

ここで、この式を因数分解する。

しかし、このままでは因数分解できないので、両辺に m をかける。

$0=m^2ab-100ma-mb$

$0=(\mathrm{ma}-1)(\mathrm{mb}-100)-100$

$100=(\mathrm{ma}-1)(\mathrm{mb}-100)$

$(\mathrm{ma}-1),(\mathrm{mb}-100)$ はそれぞれ整数で、$(\mathrm{ma}-1)(\mathrm{mb}-100)=100$ なので、

$(ma-1, mb-100)$ の組み合わせは、

$(ma-1, mb-100) = (1,100), (2,50), (4,25), (5,20), (10,10), (20,5), (25,4), (50,2), (100,1)$

しかし、a は 2 桁なので、$(ma-1) \geq 9$ よって、$(1,100), (2,50), (4,25), (5,20)$ は不適

$(ma-1, mb-100) = (10,10), (20,5), (25,4), (50,2), (100,1)$

この 5 通りの中から解答を考える

$(ma-1, mb-100) = (10,10)$ の場合　$m=1$ なら $b=110$ で 3 桁なので不適
　$m=11$ なら $a=1$ で 1 桁なので不適

$(ma-1, mb-100) = (20,5)$ の場合　$m=1$ なら $b=105$ で 3 桁なので不適
　$m=3$ なら $a=7$ で 1 桁なので不適
　$m=7$ なら $a=7$ で 1 桁なので不適
　$m=21$ なら $a=1$ で 1 桁なので不適

$(ma-1, mb-100) = (25,4)$ の場合　$m=1$ なら $b=104$ で 3 桁なので不適
　$m=2$ なら $a=13$, $b=52$ となり条件を満たす
　$m=13$ なら $a=2$ で 1 桁なので不適
　$m=26$ なら $a=1$ で 1 桁なので不適

$(ma-1, mb-100) = (50,2)$ の場合　$m=1$ なら $b=102$ で 3 桁なので不適
　$m=3$ なら $a=17$, $b=34$ となり条件を満たす
　$m=17$ なら $a=3$ で 1 桁なので不適
　$m=51$ なら $a=1$ で 1 桁なので不適

$(ma-1, mb-100) = (100,1)$ の場合　$m=1$ なら $a=b=101$ で 3 桁なので不適
　$m=101$ なら $a=b=1$ で 1 桁なので不適

以上から、$n = 1352, 1734$

● 評価と課題

　数学クラブは、より高度な数学的能力(直観的発想能力、論理的説明能力、表現力等)の開発を目指すための、生徒が考える対象と考える場を提供してきた。上記の活動内容はその到達点である。
その結果、数学オリンピック予選参加者 14 名中Ａ合格(数学オリンピック国内予選本戦出場資格)１名、Ｂ合格７名、Ｃ合格６名であった（昨年度は参加者８名中Ｂ合格 5 名)。昨年度と比較して、その参加人数や合格者数などが増加したことや、解答の中にはユニークな解答も含まれており日々の活動の成果があったといえる。
　また、自分が考えた解答を様々な場や方法で発表することにより、プレゼンテーション能力を高めさせることができた。
　現在の活動が少しずつ実を結んできたが、年度が替わり新しいメンバーで活動していく中で、今後も同じ活動内容でいいのか、新しい活動内容を考えていくのか検討する時期になってきている。

（注）『平成 17 年度スーパーサイエンスハイスクール研究開発実施計画書』、2005、京都教育大学附属高校、P.7